INTRODUZIONE ALLE FUNZIONI MATEMATICHE E ALLA GEOMETRIA ANALITICA.

di

Salvatore Leo Incarbone

Introduzione: il concetto di funzione.
Immaginiamo di voler fare dei conti con una calcolatrice da tavolo che raffiguriamo con una scatola, in figura con un rettangolo.

Su questa macchina diteggiamo un numero qualsiasi e una o più funzioni di calcolo espresse con simboli adatti o con altri numeri operativi.
La macchina si metterà in f***unzione*** [che indichiamo con **f( )**] previo un comando adatto e fornirà un risultato numerico y che ***<u>dipende</u>*** sia dal ***<u>numero</u>*** presentato in ingresso alla macchina e sia dalla ***<u>funzione</u>*** assegnata.

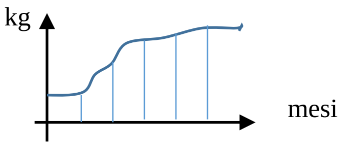
x ➔ $\boxed{f(\ )}$ ➔ y   S'intende che la macchina fa e dà y = f(x)

Raffiguriamo tutto ciò con un numero *variabile X* che ***<u>non</u>*** dipende dalla macchina ma da una ***nostra scelta indipendente*** e quindi è detta "variabile indipendente", (cioè indipendente dalla macchina) e innesca la funzione f(x).
Il risultato Y dipende invece dal calcolo effettuato, cioè sia da ***X*** che è la ***<u>variabile indipendente</u>*** d'ingresso, sia dalla ***<u>funzione f()</u>*** eseguita dalla macchina e perciò ***Y*** è detta ***<u>variabile dipendente</u>*** di uscita.
Eventualmente potremo memorizzare l'intero procedimento e le sue eventuali ripetizioni con una t***abella*** di valori del tipo:

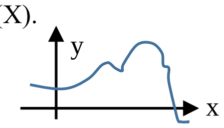
f/() ➔

x							...
y							...

nelle caselle riservate ad X metteremo i valori scritti ogni volta che si sceglie questa variabile indipendente; nella corrispondente sottostante casella metteremo il valore della variabile dipendente Y calcolato secondo il funzionamento f() della macchina.
Come ulteriore alternativa potremmo rappresentare i valori della ***X su una retta*** denominata "***asse delle X***", dotata di opportuna unità di misura u e di un verso positivo (indicato p. es. con una freccia).
A titolo d'esempio, se vogliamo controllare la funzionalità di crescita di un bambino mese per mese, la nostra unità di misura sarà il mese su un adeguato asse dei tempi o mesi. *Il tempo è la variabile indipendente,* e a tal punto lo è da scorrere senza dare – neanche a noi - alcuna possibilità di scelta.
La variabile dipendente potrebbe essere allora il peso del corpo in grammi e lo indichiamo su un corrispondente asse della variabile dipendente "peso", esteso perpendicolarmente al primo asse (quello dei mesi era stato scelto per esempio orizzontale). Questo nuovo asse dei pesi sarà allora verticale; l'unità di misura – contrassegnata da due tacche che la delimitano - potrà essere il kg e l'asse potrà essere anch'esso suddiviso in tacche; *il peso sarà la variabile dipendente* sia dal cibo fornito e sia dalla funzione complessiva che il corpo ha e manifesta con la crescita, ma sarà valutato in rapporto al tempo che scorre indipendentemente.



In "analisi matematica" nasce così il concetto di "funzione" in cui si tiene conto della variabile indipendente X stabilita a nostra scelta, di una funzionalità o "funzione" f( ) che rappresenta l'elaborazione eseguita su X, e di un risultato che "dipendendo" da tutto ciò, è detto "variabile dipendente" Y.
Tutto questo è simboleggiato con l'espressione Y=f(X).

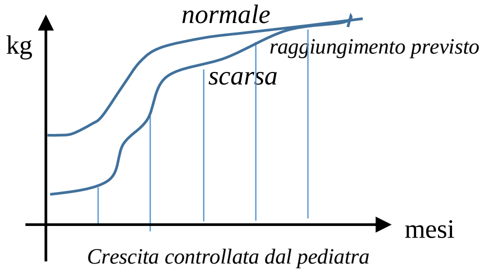


La rappresentazione con i due assi è detta "grafico cartesiano nel piano" o "sistema di riferimento cartesiano".

Il caso di più funzioni che s'incontrano in un punto comune.
Supponiamo di voler raffigurare più funzioni su uno stesso grafico.
Può accadere per esempio che vogliamo sapere se un bimbo sottopeso che cresce troppo poco, riuscirà a raggiungere e quando il peso normale.

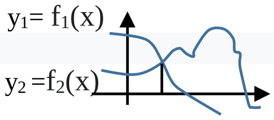
In base alle misure effettuate, potremmo sperare di fare qualche previsione, ma in genere è difficile essere precisi in merito soprattutto perché occorre una veduta d'insieme dei due andamenti - quello normale e quello ritardato - per poterle utilmente confrontare.
Questo è possibile con i procedimenti della geometria analitica che fa uso dei grafici. Allo scopo di ottenere un confronto il più possibile prevedibilmente veritiero, raffiguriamo in uno stesso sistema di riferimento i due andamenti.

<u>*Diagramma di crescita*</u>



Crescita controllata dal pediatra

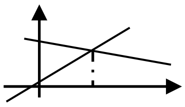
In alto l'andamento normale, più in basso la curva dell'andamento sottopeso.
Si comprende così il vantaggio che si ha raffigurando in uno stesso grafico due funzioni diverse al fine di valutare il loro punto di incontro o di confrontarle.
In generale, se abbiamo due funzioni distinte $Y_1 = f_1(X)$ e $Y_2 = f_2(X)$ di cui vogliamo sapere per quale X le due variabili dipendenti Y_1 e Y_2 saranno uguali fra loro, conviene raffigurarle su uno stesso piano cartesiano,
Si noterà subito che questa relazione d'uguaglianza $Y_1=Y_2$ ha importanza quando si verifica per un determinato valore di X giacché questa coincidenza implica e indica un punto d'intersezione fra le due curve.
Nel piano cartesiano ciò equivale a trovare il ***punto d'incontro <u>comune</u>*** ai grafici delle due funzioni $f_1(X)$ e $f_2(X)$.



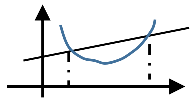
Se le due funzioni sono diverse e date algebricamente $f_1(X)$ e $f_2(X)$ allora il problema è risolto dal sistema:

$$\begin{cases} Y_1 = f_1(X) \\ Y_2 = f_2(X) \end{cases}$$

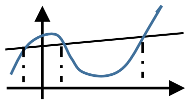
infatti il sistema è risolto quando un ben determinato valore di X, sostituito in $f_1(X)$ e $f_2(X)$, fornisce identico risultato $f_1(X) = f_2(X)$ cioè quando si verifica la relazione $Y_1=Y_2$ per una stessa ascissa X. Dunque in un ***<u>punto comune</u>***.
Nel grafico ciò corrisponde al <u>*punto di intersezione*</u> dei grafici delle due funzioni ovverosia al loro punto comune.
In effetti trovare i punti comuni di due (o più) funzioni, equivale al problema di risolvere il sistema delle funzioni (equazioni) corrispondenti che rappresentano le funzioni medesime.
Si possono avere vari casi a seconda del numero di soluzioni cioè del numero dei punti di intersezione.



a. Una sola soluzione (I° grado)



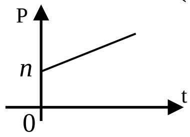
b. Due soluzioni (II° grado)



c. Tre soluzioni (III° grado)

Il grado.
Si noti che la relazione più semplice tra le variabili è quella cosiddetta "lineare" ovvero "di primo grado". Il grado è definito come l'esponente massimo di una funzione espressa con un polinomio.
Se p. es. vogliamo descrivere numericamente con un'equazione l'accrescimento in peso del corpo di un bimbo in funzione del tempo, la maniera più semplice per farlo è immaginare la relazione riassuntiva (di 1° grado in P e t):

$$P = kt + n$$



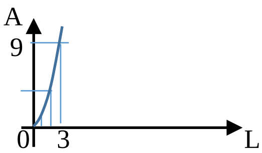
Per t=0 si ha il peso n alla nascita.

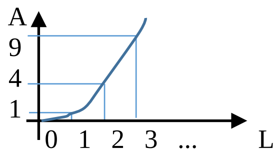
I simboli indicano: p = peso in grammi, t = tempo in mesi (1, 2, 3, ...), k = ritmo medio di crescita in "grammi in un mese", n = peso iniziale (p. es. alla nascita o all'inizio del mese oppure alla data dell'ultima pesata). Invece di parlare di ogni minima variazione del peso durante il mese, di solito si dà la variazione complessiva avvenuta in un certo lasso di tempo. Questa valutazione è detta "tasso di crescita" e ci appare come rapporto k fra peso e tempo; precisamente $k = (P-n)/t =$

peso attuale P, meno il peso iniziale n (alla nascita o all’inizio del mese), in rapporto al lasso di tempo t. Il rapporto si effettua con la divisione.
Il grafico è un segmento di retta e la relazione è un’equazione di primo grado. Con ciò s’intende semplicemente che la variabile indipendente (tempo), e così pure la variabile dipendente, compaiono come potenze con esponente unitario.
Una relazione di ***secondo grado*** è p. es. quella fra il lato L d’un quadrato e la sua area A. La funzione è allora: $A = L^2$.

Lato L	0	1	2	3	...
Area A	0	1	4	9	...

Le coppie di coordinate in cui L funge da ascissa ed A da ordinata, cioè del tipo (L; A), sono (0;0), (1;1), (2;4), (3;9).





Nel grafico a sinistra si usa un’unità di misura comune ai due assi, In quello a destra le unità sono diverse per meglio vedere l’andamento.

Riportando i valori ottenuti nel sistema di riferimento cartesiano, e raccordandoli con una linea curva, si vede che si ottiene una forma curvilinea. Si tratta di una forma curva che è detta ***parabola***.
La relazione $A = L^2$ è considerata di “secondo grado” giacché la variabile indipendente “lato L” essendo elevata al quadrato, compare come potenza con esponente 2. Per questa relazione, essendo l’area A molto crescente con il variare del lato, è preferibile usare ***unità di misura diverse sui due assi*** in modo da poter ***apprezzare meglio*** l’andamento della curvatura. Ciò si vede nel grafico a destra.

Cenni introduttivi alla parabola e alla circonferenza.
In generale, le relazioni di secondo grado del tipo: $y=ax^2 + bx + c$, possono effettivamente includere termini di primo grado (come in $bx = bx^1$) e di grado zero (come in $c = cx^0 = c\cdot 1= c$) e quindi presentarsi come trinomio completo di secondo grado. Il termine “trinomio” significa semplicemente “tre nomi”: in $ax^2 + bx + c$ vediamo infatti tre parti che si sommano.
Si dimostra che questo trinomio corrisponde a un grafico con andamento parabolico e che la sua rappresentazione è una parabola con forma ad “U” (diritta o rovesciata a seconda del segno del primo coefficiente “a”), la cui apertura e posizionamento dipendono anche dai coefficienti b e c.
L’asse X “ha equazione” y=0 poiché in qualsiasi punto dell’asse X, l’ordinata Y è di valore nullo.
Consideriamo ora il ***sistema delle due equazioni*** di una parabola e della retta “asse delle x, cioè y=0”.
Considerare o porre a sistema due equazioni implica “indicarle insieme” con una parentesi graffa. Viceversa riunire con una graffa due equazioni significa cercare quelle soluzioni che le soddisfino entrambe contemporaneamente.

$$\begin{cases} y=ax^2 + bx + c & \text{(parabola)} \\ y=0 & \text{(retta dell’asse x)} \end{cases}$$

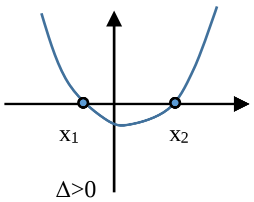
Per risolvere il sistema, usiamo e sostituiamo y=0 nell’equazione del trinomio e abbiamo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

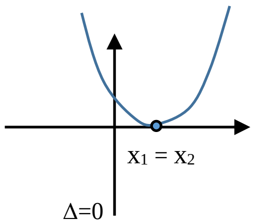
che, risolta, fornisce due valori per x e cioè x_1 e x_2.
Sappiamo che le ***soluzioni*** devono indicare ***punti comuni*** alle due “curve” (*anche una retta è considerata una curva sebbene particolare*) cioè comuni alla parabola e alla retta y=0, vale a dire devono fornire i punti di intersezione fra le due curve. Si sa che le due soluzioni del trinomio dipendono dal valore del discriminante Δ, (definito da $\Delta=b^2-4ac$), nel senso che:

1. se $\Delta>0$ si hanno due soluzioni ***reali e distinte*** x_1 e x_2
2. se $\Delta=0$ si hanno due soluzioni ***reali e coincidenti*** $x_1 = x_2$
3. se $\Delta<0$ si hanno due soluzioni ***complesse e coniugate*** x_1 e x_2

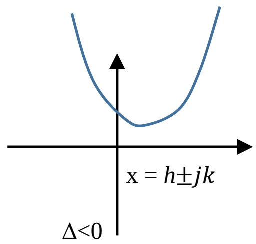
Queste tre eventualità si riferiscono al fatto che la parabola può avere tre modalità d’intersezione con l’asse x.
Nel primo caso le intersezioni sono due e diverse. Nel secondo caso le due coincidono in un solo “punto doppio” in cui l’asse delle x risulta tangente alla parabola. Nel terzo caso non si ha alcuna reale intersezione e si ricorre allora ai numeri complessi in cui compaiono i cosiddetti numeri “immaginari”, ideati per indicare le radici quadrate di numeri negativi (impossibili nel campo “reale”). Essi traggono origine dalla definizione: $j = \sqrt{-1}$. Non possiamo qui presentarne la teoria.



Due soluzioni reali e distinte

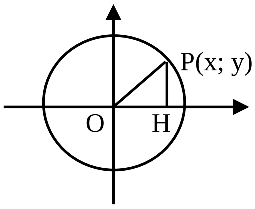


Due soluzioni reali e coincidenti



Due soluzioni “complesse coniugate”

Tutte le equazioni di II* grado sono parabole? No, infatti consideriamo l’equazione $x^2 + y^2 = r^2$.
Vedremo subito che si tratta di una circonferenza descritta da un punto P (x, y) a distanza costante dall’origine O degli assi.



Posto OP=r, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo si ha infatti:

$$\boxed{OH^2 + PH^2 = OP^2}$$

*che è la **legge geometrica** del luogo “circonferenza”.*

Per passare alla ***legge algebrica*** basta riferirsi alle coordinate del riferimento notando che:

OH = x ascissa di H e di P,
PH = y ordinata di H e di P,
OP = r perché è il raggio della circonferenza.

Sostituendo le lettere x, y, r nella legge geometrica, si ottiene la legge algebrica della circonferenza con centro nell’origine degli assi e raggio r:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

L’equazione di questa circonferenza è di *secondo grado in x e in y* e inoltre i coefficienti di queste due potenze devono essere uguali fra loro. In caso contrario – come vedremo - si avrebbe un’ellisse.
L’equazione della circonferenza con centro in un punto qualsiasi del piano cartesiano è: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ in cui – a titolo di curiosità e come vedremo - variano soltanto i parametri a, b, c; è essenziale, comunque, che i coefficienti di x^2 e di y^2 siano uguali fra loro. Se l’equazione fosse $x^2 + y^2 = 0$ allora la figura geometrica corrispondente si ridurrebbe ad un solo punto nell’origine (poiché r=0 implica un raggio nullo). Se l’equazione fosse $x^2 + y^2 = 1$, il raggio sarebbe r=1; se p. es. fosse $x^2 + y^2 = 4$, il raggio sarebbe r = 2.

Cenni storici e definizione del sistema di riferimento cartesiano.
Finora abbiamo accennato all’utilità pratica dell’uso del sistema di riferimento cartesiano con due assi, ascissa e ordinata. Daremo un rilievo teorico essenziale per la comprensione del sistema e del suo uso teorico e pratico.
Innanzitutto è necessario inquadrare storicamente l’invenzione della geometria analitica per poi passare all’esposizione teorica iniziando dalla definizione del sistema di riferimento che ne costituisce l’insostituibile essenza.
Tutto ciò è trattato in “Geometria analitica”, articolo presentato in psicopoiesi.it.

Indice